

بسم الله الرحمن الرحيم

کلاس نکته و تست
نظریه زبان ها و ماشین ها

ابوالفضل گیلک

جلسه اول – فصل اول
مفاهیم پایه: گرامر، زبان، ماشین

حل تست های 15 سال اخیر

ارشد – دکتری

مهندسی کامپیوتر – علوم کامپیوتر

جلسه اول - فصل 1

مفاهیم پایه

تست 1 تا 25

1- زبان $L = \{a^{2^n} \mid n \geq 0\}$ را در نظر بگیرید. برای تولید این زبان گرامر زیر پیشنهاد شده است (S متغیر شروع و a تنها حرف الفبا است)

(مهندسی کامپیوتر - 1401)

$G : S \rightarrow [Ra] \mid a$
 $Ra \rightarrow aaR$
 $aL \rightarrow La$
 $aH \rightarrow ?a$
 $R] \rightarrow L] \mid H$
 $[L \rightarrow [R$
 $[? \rightarrow \varepsilon$

کدام گزینه در خصوص نوع گرامر بالا و عبارتی که بایستی به جای ؟ قرار گیرد، درست است؟

- 1) نوع صفر (بدون محدودیت) - R
 2) نوع یک (حساس به متن) - [R
 3) نوع صفر (بدون محدودیت) - H
 4) نوع یک (حساس به متن) - aH

(مهندسی کامپیوتر - 1401)

2- گرامر روبرو کدام یک از زبان‌های زیر را توصیف می‌کند؟

$S \rightarrow aSd \mid A \mid B$
 $A \rightarrow aAc \mid C$
 $B \rightarrow bBd \mid C$
 $C \rightarrow bCc \mid \varepsilon$

$$L = \{a^m b^n c^p d^q \mid m+n = p+q\} \quad (1)$$

$$L = \{a^m b^n c^p d^q \mid m+p = n+q\} \quad (2)$$

$$L = \{a^m b^n c^p d^q \mid m+n+p = q\} \quad (3)$$

$$L = \{a^m b^n c^p d^q \mid m=q \text{ and } n=p\} \quad (4)$$

(مهندسی کامپیوتر - 1400)

3- گرامر زیر چه زبانی را تولید می‌کند؟ (ε بیانگر رشته تهی است)

$G : S \rightarrow S_1 B$
 $S_1 \rightarrow aS_1 b$
 $bB \rightarrow bbbB$
 $aS_1 b \rightarrow aa$
 $B \rightarrow \varepsilon$

$$L(G) = \{a^{n+1} b^{n+k} \mid n \geq 1, k = -1, 1, 3, 5, \dots\} \quad (1)$$

$$L(G) = \{a^n b^{n+2k} \mid n \geq 2, k = 0, 1, 2, \dots\} \quad (2)$$

$$L(G) = \{a^{n+1} b^{n+k} \mid n \geq 1, k \geq 0\} \quad (3)$$

$$L(G) = \{a^n b^m \mid n \geq 2, m \geq 0\} \quad (4)$$

- 4- زبان‌های $L_1 = \emptyset$ و $L_2 = \{a\}$ را در نظر بگیرید. پاسخ $L_1 L_2^* \cup L_1^*$ برابر با کدام مورد است؟ (مهندسی کامپیوتر - 99)
- (1) $\emptyset$ (2) a^* (3) $\{\varepsilon\}$ (4) $\{\varepsilon, a\}$

- 5- زبان $L = \{ab, aa, baa\}$ را در نظر بگیرید. کدام یک از رشته‌های زیر در L^* وجود دارند؟ (مهندسی کامپیوتر - 98 و 99)
- الف) $abaabaaabaa$ ب) $aaaabaaaa$ ج) $baaaaabaaaab$ د) $baaaaabaa$
- (1) الف، ب و ج (2) الف، ب و د (3) الف، ج و د (4) ب، ج و د

- 6- فرض کنید ε بیانگر رشته تهی و $n_a(w)$ بیانگر تعداد a و در رشته w باشد. زبان گرامر زیر کدام است؟ (مهندسی کامپیوتر - 96)

$G : S \rightarrow ABSa \mid \varepsilon$

$A \rightarrow a$

$B \rightarrow b \mid bb$

$AB \rightarrow BA$

$$L(G) = \{w = a^k b^m a^k : k \leq m \leq 2k\} \quad (1)$$

$$L(G) = \{wa^k : w \in (a+b)^* : n_a(w) = k \text{ and } k \leq n_b(w) \leq 2k\} \quad (2)$$

$$L(G) = \{w \in (a+b)^* : n_a(w) = 2k \text{ and } k \leq n_b(w) \leq 2k\} \quad (3)$$

$$L(G) = \{wa^k : w \in (a+b)^* : n_a(w) = k \text{ and } (n_b(w) = k \text{ or } n_b(w) \leq 2k)\} \quad (4)$$

- 7- گرامر زیر چه زبانی را تولید می‌کند؟ (λ نمایانگر رشته به طول صفر است و در تمام گزینه‌ها $m, n, k, k_1, k_2 \geq 0$)

(مهندسی کامپیوتر - 95)

$G : S \rightarrow aSa \mid B \mid \lambda$

$Ba \rightarrow bbBaa$

$aB \rightarrow aaBbbb$

$B \rightarrow \lambda$

$$L(G) = \{a^n b^{2n} a^{2n}\} \cup \{a^{2n} b^{3n} a^n\} \quad (1)$$

$$L(G) = \{a^n b^{2k} a^{n+k}\} \cup \{a^{n+k} b^{3k} a^n\} \quad (2)$$

$$L(G) = \{a^n b^{2k} a^{n+2k}\} \cup \{a^{n+2k} b^{3k} a^n\} \quad (3)$$

$$L(G) = \{a^{n+k_1} b^m a^{n+k_2} : 2k_1 \leq m \leq 3k_2\} \quad (4)$$

- 8- کدام گزینه گرامر زیر را برای تولید زبان $L = \{ww : w \in \{a, b\}^*\}$ کامل می‌کند؟ (علوم کامپیوتر - 95)

$S \rightarrow AS \mid BS \mid C$

$C \rightarrow \lambda$

$BC \rightarrow CB'b$

$AC \rightarrow CA'a$

$bB' \rightarrow B'b$

$bA' \rightarrow A'b$

$aB' \rightarrow B'a$

$aA' \rightarrow A'a$

$$A' \rightarrow a, CA' \rightarrow Ca \quad (1)$$

$$CB' \rightarrow Cb, CA' \rightarrow Ca \quad (2)$$

$$A' \rightarrow a, B' \rightarrow b \quad (3)$$

$$CB' \rightarrow bC, CA' \rightarrow aC \quad (4)$$

- 9- کدام عبارت در مورد گرامر زیر صحیح است؟ (مهندسی کامپیوتر - 94)

$S \rightarrow SBA \mid a$

$BA \rightarrow AB$

$aA \rightarrow aaB$

$B \rightarrow b$

(1) یک زبان حساس به متن و غیر مستقل از متن را معرفی می‌کند.

(2) یک زبان مستقل از متن و غیرخطی را معرفی می‌کند.

(3) یک زبان مستقل از متن و خطی را معرفی می‌کند.

(4) قادر به تولید هیچ رشته‌ای نیست.

10- کدام گزینه گرامر $\langle S \rightarrow aB \mid bA \mid \lambda \rangle$ را برای زبان $L \subseteq \{a, b\}^*$ که هر عضو آن دارای تعداد برابری a و b است کامل می‌کند؟
(علوم کامپیوتر - 94)

- (1) $A \rightarrow SaS, B \rightarrow SbS$
(2) $A \rightarrow aS, B \rightarrow bS$
(3) $A \rightarrow aS \mid Sa, B \rightarrow bS \mid Sb$
(4) $A \rightarrow aS \mid Sa \mid \lambda, B \rightarrow bS \mid Sb \mid \lambda$

11- فرض کنید L, M و N زبان‌هایی با الفبای $\Sigma = \{0, 1\}$ باشند. کدام گزینه درست است؟
(علوم کامپیوتر - 91)

- (1) $LM \cap LN = L(M \cap N)$
(2) $LM \cap LN \subseteq L(M \cap N)$
(3) $L(M \cap N) \subseteq LM \cap LN$
(4) $(M \cap N).L = L(M \cap N)$

12- اگر L یک زبان روی مجموعه الفبای Σ باشد، کدام یک نمایشی برای $((L^R)^n)^R$ است؟
(علوم کامپیوتر - 90)

- (1) $\{(w^n)^R : w \in L\}$
(2) $\{(w^R)^n : w \in L\}$
(3) $\{w_n^R w_{n-1}^R \dots w_1^R : w_i \in L\}$
(4) $\{w_1 w_2 \dots w_n : w_i \in L\}$

13- کدام گزینه در مورد تقسیم دو زبان L و L' با تعریف زیر درست نیست؟
(علوم کامپیوتر - 90)

$$L / L' = \{x \mid \exists y(xy \in L \text{ and } y \in L')\}$$

- (1) اگر $\lambda \in L'$ باشد آنگاه، $L \subseteq L / L'$ خواهد بود.
(2) اگر $L / L' = \emptyset$ باشد آنگاه، $L = \emptyset$ یا $L' = \emptyset$ خواهد بود.
(3) اگر $L \cap L' \neq \emptyset$ باشد آنگاه، $\lambda \in L / L'$ خواهد بود.
(4) اگر $L' = \emptyset$ باشد آنگاه، $L / L' = \emptyset$ خواهد بود.

14- اگر $\Sigma = \{a, b, c\}$ و $L - \Sigma^* = \emptyset$ باشد، آنگاه L کدام یک از زبان‌های زیر می‌تواند باشد؟
(مهندسی کامپیوتر - 86)

- (1) فقط I
(2) فقط IV
(3) فقط I و III
(4) I, II, III و IV
- I- Σ^* II- $a^n b^n c^n$ III- $\emptyset$ IV- ε

15- برای زبان داده شده $L \subseteq \Sigma^*$ فرض کنید $L \cap L\Sigma^+ = \emptyset$ ، کدام گزاره غلط است؟
(علوم کامپیوتر - 87)

- (1) L می‌تواند زبان تهی باشد.
(2) L حتماً زبانی منظم است.
(3) اگر $\lambda \in L$ آنگاه $L = \{\lambda\}$
(4) $L' \cap L'\Sigma^+ = \emptyset$ نیز داریم $L' = L - L\Sigma^+$ برای زبان L آنگاه $\lambda \notin L$

16- اگر $L \subseteq \Sigma^*$ داده شده باشد، شرط $L \cap L\Sigma^+ = \emptyset$ با کدام گزاره معادل است؟
(علوم کامپیوتر - 87)

- (1) $x, xy \in L \Rightarrow x = \lambda$
(2) $x, xy \in L \Rightarrow y = \lambda$
(3) $y, yx^2 \in L \Rightarrow x = \lambda$
(4) $y, xyx^2 \in L \Rightarrow y = \lambda$

17- گرامر زیر چه زبانی را تولید می کند؟ (λ نمایانگر رشته ی تهی است).

$G: S \rightarrow S_1 B$
 $S_1 \rightarrow a S_1 b$
 $b B \rightarrow b b b B$
 $a S_1 b \rightarrow a a$
 $B \rightarrow \lambda$

$$L(G) = \{a^{n+2}b^{3n} \mid n \geq 0\} \quad (1)$$

$$L(G) = \{a^n b^{n+2k} \mid n \geq 2, k \geq 0\} \quad (2)$$

$$L(G) = \{a^{n+2}b^{n+2k} \mid n, k \geq 0\} \quad (3)$$

$$L(G) = \{a^{n+1}b^{n+k} \mid n \geq 1, k \geq 0\} \quad (4)$$

(علوم کامپیوتر - 82)

18- اگر L زبانی با الفبای Σ باشد ($L \subseteq \Sigma^*$) و بدانیم که $L^2 \subseteq L$ ، آن گاه:

$$L^n \subseteq L, \quad n \geq 2 \quad (2) \quad \text{برای هر}$$

$$L = \emptyset \quad (4)$$

(1) L حتماً زبانی متناهی است.

(3) L حتماً زبانی نامتناهی است.

19- فرض کنید A, B و C زبان هایی هستند که روی یک الفبا تعریف می شوند کدام یک از گزاره های زیر درست است؟

(علوم کامپیوتر - 80)

$$(A \cap B).C = (A.C) \cap (B.C) \quad (2)$$

$$(A \cup B)^* = (A^*) \cup (B^*) \quad (4)$$

$$(A \cap B)^* = (A^*) \cap (B^*) \quad (1)$$

$$(A^* \cup B^*).C^* = (A^*.C^*) \cup (B^*.C^*) \quad (3)$$

(مهندسی کامپیوتر - 78)

20- زبان گرامر زیر چیست؟

$S \rightarrow a S C \mid a S' C$
 $S' \rightarrow b S' D \mid b S'' D$
 $S'' C \rightarrow c$
 $D C \rightarrow C D$
 $c C \rightarrow c c$
 $D \rightarrow d$

$$L = \{w \mid w = a^n b^m c^n d^m, n, m > 0\} \quad (1)$$

$$L = \{w \mid w = a^n b^m c^m d^n, n, m > 0\} \quad (2)$$

$$L = \{w \mid w = a^n b^n c^n d^n, n > 0\} \quad (3)$$

(4) هیچ کدام

(علوم کامپیوتر - 96)

21- کدام گزینه زبان $L_1 = \{w \mid w \in \{a, b\}^*, |w| \bmod 3 \geq 1\}$ را بر حسب زبان های زیر بیان می کند؟

$$L_2 = \{a, b\}, \quad L_3 = \{aa, ab, ba, bb\}$$

$$L_4 = \{aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb\}$$

$$L_1 = L_4^* L_2^* L_3^* \quad (4) \quad L_1 = L_4^* L_2 \cup L_4^* L_3 \quad (3) \quad L_1 = L_4^* L_2 L_3 \quad (2) \quad L_1 = L_4^* L_2 \cup L_3 \quad (1)$$

(علوم کامپیوتر - 96)

22- عملگر Unary روی زبان L به صورت زیر تعریف می شود:

$$\text{Unary}(L) = \{1^{|w|} \mid w \in L\}$$

حال زبان های L_1 و L_2 را به صورت زیر در نظر بگیرید ($\Sigma = \{0, 1\}$).

$$L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid \text{تعداد صفر با تعداد یک در رشته } w \text{ برابر است}\}$$

$$L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid \text{تعداد صفر با تعداد یک در رشته } w \text{ برابر نیست}\}$$

$$\text{Unary}(L_2) = 1^+ \quad \text{Unary}(L_1) = (11)^* \quad (2) \quad \text{Unary}(L_2) = 1^* \quad \text{Unary}(L_1) = (11)^+ \quad (1)$$

$$\text{Unary}(L_2) = 1^* \quad \text{Unary}(L_1) = (11)^* \quad (4) \quad \text{Unary}(L_2) = 1^+ \quad \text{Unary}(L_1) = (11)^+ \quad (3)$$

23- رابطه بازگشتی زیر چه زبانی را توضیح می‌دهد؟

(علوم کامپیوتر - 97)

$$\Sigma = \{a, b\}$$

$$\lambda \in L \quad \forall x \in L \Rightarrow axab \in L, \quad bx \in L$$

$$L = \left\{ x \in \Sigma^* \mid x = (ba)^n (ab)^n \right\} \quad (2)$$

$$L = \left\{ x \in \Sigma^* \mid x = w (ab)^{n_a(w)}, w \in \Sigma^* \right\} \quad (4)$$

$$L = \left\{ x \in \Sigma^* \mid \Sigma^n (ab)^n \right\} \quad (1)$$

$$L = \left\{ x \in \Sigma^* \mid x = a^n b^* (ab)^n \right\} \quad (3)$$

24- با این شرط که

$$\lambda \in L, \quad \forall x, y \in L \quad (axy, byax \in L)$$

(علوم کامپیوتر - 98)

زبان L کدام است؟ ($n_a(x)$: تعداد کاراکتر a در رشته x)

$$L = \left\{ x \in \Sigma^* \mid n_a(x) = n_b(x) \quad x \in \{a^+ b^+\} \right\} \quad (2)$$

$$L = \left\{ x \in \Sigma^* \mid n_a(x) = n_b(x) \quad x \in \{a^+ b^+, b^+ a^+\} \right\} \quad (4)$$

$$L = \left\{ x \in \Sigma^* \mid n_a(x) = n_b(x) \right\} \quad (1)$$

$$L = \left\{ x \in \Sigma^* \mid n_a(x) = n_b(x) \quad x \in \{b^+ a^+\} \right\} \quad (3)$$

(علوم کامپیوتر - 99)

25- فرض کنید $L = (01^* 01^+)^*$ و $L' = ((0+00)1^+)^*$ کدام گزینه درست است؟

$$L' \subset L, L \subset L' \quad (4)$$

$$L' \subset L \quad (3)$$

$$L \subset L' \quad (2)$$

$$L = L' \quad (1)$$

فصل 1

پاسخ تست‌های مفاهیم پایه

1- گزینه (3) صحیح است.

قاعده $R \rightarrow H$ را داریم پس گرامر حساس به متن نیست و بدون محدودیت است؛ برای پایان دادن به تولید رشته a^{2^n} لازم است متغیر H بتواند از انتهای سمت راست به انتهای سمت چپ برود ($aH \rightarrow Ha$) و سپس با قاعده $[H \rightarrow \varepsilon]$ به تولید رشته خاتمه دهیم.

$$S \Rightarrow [Ra] \Rightarrow [aaR] \Rightarrow [aaL] \Rightarrow [aLa] \Rightarrow [Laa] \Rightarrow [Raa] \Rightarrow [aaRa] \Rightarrow [aaaaR] \Rightarrow [aaaaH] \Rightarrow [aaaaHa] \Rightarrow [Haaaa] \Rightarrow aaaa$$

2- گزینه (1) صحیح است.

$$S \xRightarrow{*} a^m S d^m \Rightarrow a^m A d^m \xRightarrow{*} a^m a^n A c^n d^m \Rightarrow a^m a^n C c^n d^m \xRightarrow{*} a^m a^n b^k c^k c^n d^m$$

$$S \xRightarrow{*} a^m S d^m \Rightarrow a^m B d^m \xRightarrow{*} a^m b^n B d^n d^m \Rightarrow a^m b^n C d^n d^m \xRightarrow{*} a^m b^n b^k c^k d^n d^m$$

همه رشته‌ها به فرم زیر هستند:

$$L(G) = \{a^m b^n c^p d^q \mid m+n=p+q\}$$

3- گزینه (1) صحیح است.

رشته‌های قابل تولید توسط این گرامر برابر زبان زیر است:

$$L(G) = \{a^{m+2} b^{m+2p} \mid m, p \geq 0\}$$

با فرض $n = m+1$ و $k = 2p-1$:

$$L(G) = \{a^{m+1+l} b^{m+1+2p-1} \mid m, p \geq 0\} = \{a^{n+1} b^{n+k} \mid n \geq 1, k = -1, 1, 3, 5, \dots\}$$

4- گزینه (3) صحیح است.

بستار تهی فقط شامل رشته تهی است. الحاق تهی در هر مجموعه دیگر تهی است. از آنجا که $L_1 = \emptyset$ و $L_2 = \{a\}$ داریم:

$$L_1 L_2^* \cup L_1^* = \emptyset. \{a\}^* \cup \emptyset^* = \{a^n : n \geq 0\} \cup \{\varepsilon\} = \{a^n : n \geq 0\} \cup \{\varepsilon\} = \{a^n : n \geq 0\}$$

5- گزینه (2) صحیح است.

رشته‌های (الف)، (ب) و (د) به L^* تعلق دارند:

الف: $abaaabaa$ ب: $aaabaa$ د: $baaaba$

اما تولید (ج) با رشته‌های عضو L امکان ندارد.

6- گزینه (2) صحیح است.

(صورت سوال ناقص اما پاسخ روشن است). قاعده $S \rightarrow ABSa^k$ شبه رشته‌های $(AB)^k Sa^k$ را تولید می‌کند. با جایگزینی تهی به جای S به شبه رشته‌های $(AB)^k a^k$ می‌رسیم. قاعده $AB \rightarrow BA$ (به همراه قاعده $BA \rightarrow AB$ که طراح آن را جا انداخته است) امکان جابجایی این دو متغیر با هم را می‌دهد:

$$wa^k : w \in (A+B)^*, n_A(w) = k, n_B(w) = k$$

هر A دقیقاً به یک a تبدیل می‌شود و هر B به یک یا دو b تبدیل می‌شود:

$$wa^k : w \in (a+b)^*, n_a(w) = k, k \leq n_b(w) \leq 2k$$

روش دوم:

7- گزینه (2) صحیح است.

$$S \Rightarrow \dots \Rightarrow a^n S a^n \Rightarrow a^n B a^n$$

با شروع از S و چند مرحله اشتقاق داریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} a^n b^2 b a a^n \Rightarrow a^n b^4 b a^2 a^n \Rightarrow \dots \Rightarrow a^n b^{2k} B a^k a^n \Rightarrow a^n b^{2k} a^{n+k} \\ a^n a B b^3 a^n \Rightarrow a^n a^2 B b^6 a^n \Rightarrow \dots \Rightarrow a^n a^k B b^{3k} a^n \Rightarrow a^{n+k} b^{3k} a^n \end{cases}$$

لذا $L(G) = \{a^n b^{2k} a^{n+k} : n, k \geq 0\} \cup \{a^{n+k} b^{3k} a^n : n, k \geq 0\}$ است؛ پس گزینه 2 صحیح است.

8- گزینه (4) صحیح است.

روش سریعتر، رد گزینه‌های غلط است. برخی از رشته‌های عضو $L(G)$ عبارتند از: $L(G) = \{\lambda, aa, bb, abab, baba, \dots\}$
گزینه 1 قاعده اشتقاقی برای پایان دادن به B' ندارد اضافه کردن قواعد گزینه 2 یا گزینه 3 باعث تولید رشته‌هایی مانند $aabb$ می‌شود که به زبان L تعلق ندارند. با رد گزینه‌های غلط به گزینه 4 می‌رسیم. روش تشریحی تر در کلاس گفته شد.

9- گزینه (3) صحیح است.

ابتدا $L(G)$ را به دست آوریم:

$$S \Rightarrow SBA \Rightarrow S(BA)^2 \Rightarrow \dots \Rightarrow S(BA)^n \Rightarrow a(BA)^n \Rightarrow aA^n B^n \Rightarrow a^n ab^{2n}$$

پس $L(G) = \{a^n ab^{2n} : n \geq 0\}$ است. این زبان منظم نیست اما با گرامر خطی قابل تولید است.

10- گزینه (1) صحیح است.

برای تولید زبان $L = \{w \in (a+b)^* \mid n_a(w) = n_b(w)\}$ یکی از گرامرها $S \rightarrow aSbS \mid bSaS \mid \lambda$ است. قواعد تولید گزینه 1 را به صورت سوال اضافه کنیم با جانشانی A و B به گرامر $S \rightarrow aSbS \mid bSaS \mid \lambda$ می‌رسیم.

11- گزینه (3) صحیح است.

$L(M \cap N)$ با $LM \cap LN$ برابر نیست بلکه زیرمجموعه آن است. به عنوان مثال اگر $L = \{\lambda, 1, 11\}$ ، $M = \{1\}$ و $N = \{\lambda, 00\}$ آنگاه:
 $LM = \{1, 11, 111\}$ ، $LN = \{\lambda, 1, 11, 00, 100, 1100\} \Rightarrow LM \cap LN = \{1, 11\}$
 $M \cap N = \emptyset \Rightarrow L(M \cap N) = L \cdot \emptyset = \emptyset$

12- گزینه (4) صحیح است.

$$w_1, w_2, \dots, w_n \in L \Rightarrow \left(w_1^R w_2^R \dots w_n^R \right)^R = w_n w_{n-1} \dots w_1 \in L^n$$

13- گزینه (2) صحیح است.

درست است که در صورت تهی بودن یکی از زبان‌ها، خارج قسمت نیز تهی می‌شود اما عکس این مطلب درست نیست. برای زبان‌های $L = \{a, ba, baa\}$ و $L' = \{b\}$ ، هیچکدام از اعضای L' پسوند عضوی از L نیستند. پس L/L' برابر $\emptyset$ است در حالی که L و L' هیچکدام تهی نیستند. درستی سایر گزینه‌ها در متن درس گفته شده است.

14- گزینه (4) صحیح است.

برای هر زبان L داریم: $L \subseteq \Sigma^*$. بنابراین برای هر زبان $L - \Sigma^*$ برابر $\emptyset$ است.

15- گزینه (2) صحیح است.

به $L \cap L \Sigma^+$ دقت کنید این مجموعه وقتی تهی است که برخی از اعضای L پیشوند محض اعضای دیگر باشند.

درستی گزینه 4 واضح است: چون $L \cap L \Sigma^+ = L$ تهی است پس $L - L \Sigma^+ = L$ یعنی L' همان L است.

زبان L لزوماً منظم نیست. برای مثال L می‌تواند زبان نامنظم $\{a^n b^n : n \geq 1\}$ باشد.

16- گزینه (2) صحیح است.

برای این که اشتراک زبان L و $L\Sigma^+$ تهی باشد هیچ رشته‌ای در زبان L نباید پیشوند محض رشته دیگر باشد. به عبارتی اگر $x \in L$ و $xy \in L$ آنگاه x باید همان xy باشد. یعنی باید $y = \lambda$ باشد. این همان گزینه 2 است.

با استفاده از مثال نقض نیز می‌توان نشان داد که سایر گزینه‌ها نادرست هستند. برای مثال شرط داده شده در گزینه 4 در مورد زبان $L = \{a, ab\}$ به انتفای مقدم برقرار است ولی $L \cap L\Sigma^+ \neq \emptyset$ است.

نکته: شرط $L \cap L\Sigma^+ = \emptyset$ هم‌ارز است با این که هیچ رشته‌ای در زبان L نباید پیشوند رشته دیگری از زبان L باشد به تعبیری باید داشته باشیم: $x, xy \in L \rightarrow y = \lambda$.

به طور مشابه، شرط $L \cap \Sigma^+ L = \emptyset$ هم‌ارز است با این که هیچ رشته‌ای در زبان L نباید پسوند رشته دیگری از زبان L باشد به تعبیری باید داشته باشیم: $x, yx \in L \rightarrow y = \lambda$.

17- گزینه (3) صحیح است.

با شروع از S_1 می‌توان رشته‌های $\{a^{n+2}b^n : n \geq 0\}$ را تولید کرد. با شروع از B می‌توان رشته‌های $\{b^{2k} : k \geq 0\}$ را تولید کرد. با جانشانی در قاعده $S \rightarrow S_1 B$ زبان تولید شده توسط این گرامر، الحاق دو مجموعه فوق است: $L(G) = \{a^{n+2}b^{n+2k} \mid n, k \geq 0\}$.

18- گزینه (2) صحیح است.

با مثال نقض می‌توان گزینه‌های نادرست را رد کرد. به عنوان مثال برای رد گزینه 1 و گزینه 4 کافی است زبان L برابر مجموعه نامتناهی $\{a^{2k} : k \geq 0\}$ در نظر گرفته شود. برای رد گزینه 3 کافی است زبان L برابر مجموعه متناهی $\{\lambda\}$ یا $\emptyset$ در نظر گرفته شود.

گزینه 2 قابل اثبات است. اگر $L_1 \subseteq L_2$ باشد برای هر زبان L_3 خواهیم داشت $L_3 L_1 \subseteq L_3 L_2$ و $L_1 L_3 \subseteq L_2 L_3$.

طبق فرض $L^2 \subseteq L$ در نتیجه: $LL^2 \subseteq LL$ یعنی $L^3 \subseteq L^2$ به همین ترتیب: $L^4 \subseteq L^3$ و با استقراء داریم:

$$\forall n \geq 2 \quad L^n \subseteq L^{n-1} \subseteq \dots \subseteq L$$
19- گزینه (3) صحیح است.

الحاق روی اجتماع توزیع پذیر است. پس گزینه 3 درست است. سایر گزینه‌ها به سادگی رد می‌شوند. برای رد گزینه یک فرض کنید $A = \{a, b\}, B = \{ab\}, C = \{\lambda, b\}$. برای رد گزینه دو فرض کنید $A = \{a\}, B = \{ab\}$.

20- گزینه (1) صحیح است.

با چند بار استفاده از قواعد اشتقاق S و سپس قواعد اشتقاق S' ، شبه رشته‌هایی به فرم $a^n b^m S'' D^m C^n$ تولید می‌شوند که $n, m > 0$. سپس mn بار از قاعده $DC \rightarrow CD$ استفاده کنیم به شبه رشته‌های $a^n b^m S'' C^n D^m$ می‌رسیم. با به کارگیری قاعده $S'' C \rightarrow c$ به شبه رشته $a^n b^m c C^{n-1} D^m$ می‌رسیم. حالا $n-1$ بار از قاعده $cC \rightarrow cc$ استفاده می‌کنیم شبه رشته‌هایی به شکل $a^n b^m c^n D^m$ حاصل می‌شود در پایان با m بار به کارگیری قاعده $D \rightarrow d$ به شبه رشته‌هایی به شکل $a^n b^m c^n d^m$ تولید می‌شوند. به طور خلاصه مراحل اشتقاق چنین است:

$$S \xRightarrow{*} a^n b^m S'' D^m C^n \xRightarrow{*} a^n b^m S'' C^n D^m \xRightarrow{*} a^n b^m c C^{n-1} D^m \xRightarrow{*} a^n b^m c^n D^m \xRightarrow{*} a^n b^m c^n d^m$$

21- گزینه (3) صحیح است.

$|w| \bmod 3 \geq 1$ به این معناست که $|w| = 3k+1$ یا $|w| = 3k+2$.

L_4^* رشته‌های به طول $3k$ را دارد با الحاق آن در L_2 رشته‌های با طول $3k+1$ و با الحاق آن در L_3 رشته‌های با طول $3k+2$ تولید می‌شوند،

$$L_1 = L_4^* L_2 \cup L_4^* L_3$$
22- گزینه (2) صحیح است.

عملگر Unary هر رشته w عضو زبان L را به دنباله‌ای از $|w|$ به طول تبدیل می‌کند. رشته‌های L_1 دارای طول زوج هستند و رشته‌های L_2 دارای هر طولی به جز 0 پس: $\text{Unary}(L_1) = (11)^*$ و $\text{Unary}(L_2) = 1^+$.

23- گزینه (4) صحیح است.

با استفاده از قاعده بازگشتی داده شده تعدادی از رشته‌های عضو زبان را بنویسیم: $\lambda \in L$ پس $b\lambda \in L$ و $a\lambda ab \in L$ به همین ترتیب به صورت بازگشتی چند رشته را تولید کنیم:

$$L = \{\lambda, b, aab, bb, abab, baab, aaabab, \dots\}$$

گزینه 1 و گزینه 2 قادر به تولید b نیستند و گزینه 3 قادر به تولید $baab$ نیست. اما گزینه 4 شامل تمام این رشته‌هاست. در واقع گزینه 4 معادل گرامر زیر است:

$$S \rightarrow bS \mid aSab \mid \lambda$$

و با زبان داده شده برابر است.

24- گزینه (1) صحیح است.

ابتدا تعدادی از رشته‌های عضو زبان را به صورت بازگشتی تولید کرده و با استفاده از آنها گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$L = \{\lambda, ab, ba, abab, baab, abba, baba, \dots\}$$

گزینه‌های 2، 3 و 4 قادر به تولید λ نیستند اما گزینه 1 معادل گرامر $S \rightarrow aSbS \mid bSaS \mid \varepsilon$ است و با زبان داده شده برابر است.

25- گزینه (2) صحیح است.

دقت کنیم که $L' = (01^+ + 001^+)^*$ است. همه رشته‌های توصیف شده با 01^*01^+ در $L' = (01^+ + 001^+)^*$ قرار دارند. به زبان ساده:

$(01^*01^+) \subseteq (01^+ + 001^+)^*$ از طرفین بستار بگیریم و دقت کنیم که $(A^*)^* = A^*$ پس: $(01^*01^+)^* \subseteq (01^+ + 001^+)^*$ یعنی $L \subseteq L'$. از طرفی رشته 01 عضو L' است اما عضو L نیست پس $L \neq L'$.

پیروز و سربلند باشید.